REPÚBLICA DE COLOMBIA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL DE PALMIRA
"INSTITUCIÓN EDUCATIVA "DE ROZO"
Aprobada por Resolución Nº 0835 del 20 de FEBRERO de 2.017

GUÍA DE APRENDIZAJE No. 4

Grado: Octavo	
Área o asignatura: Matemáticas	MATEMÁTICAS
Fecha de recibido:	1 de Septiembre
Fecha de entrega:	30 de Septiembre
Nombre del estudiante:	
Objetivo de aprendizaje y/o DBA:	Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico. Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

INTRODUCCIÓN

Este tema es interesante en tanto que su utilización está en nuestra vida diaria, sobre todo en el entendimiento de la geometría. Es muy útil para generalizar muchos procedimientos matemáticos. Se pretende que el estudiante desarrolle y entienda un lenguaje algebraico, a partir de uno cotidiano para que pueda entender con mayor facilidad una situación cotidiana; hallar perímetros, áreas y volúmenes… que puedan ser resueltos con argumentos matemáticos generalizados, haciendo uso de las propiedades de la multiplicación y división de monomios y polinomios.
Teniendo en cuenta su practicidad y utilización en la vida cotidiana, se ha diseñado esta guía con el propósito de adquirir las competencias suficientes con relación a este tema.
Por lo anterior, esta guía está diseñada para trabajarla aproximadamente en dos semanas, teniendo en cuenta que usted le va a dedicar aproximadamente dos horas semanales. Cada tema de la guía contiene una explicación, ejemplos y unos ejercicios de práctica al final.
El procedimiento es que ustedes vayan leyendo la explicación que se proporciona en cada tema, pongan atención a los ejemplos y los ejercicios los copien y desarrollen en el cuaderno.

TEMAS

- ✓ Operaciones con monomios
- ✓ Clasificación de los polinomios
- ✓ Operaciones con polinomios

☑ **Monomios:** expresión algebraica cuyos elementos no están separados por los signos de las operaciones suma y resta, es decir, **conjunto de letras y números relacionados entre sí por todas las operaciones aritméticas salvo la suma y la resta.**

- ✓ **Expresión general:** $\boxed{a\cdot x^{n}}$, donde **a** es un parámetro denominado **coeficiente,** y representa números en general, **x** representa **la variable independiente** o parte literal y **n** el exponente de esa parte literal**,** o **grado del monomio.**
- ✓ **Monomios semejantes,** son aquellos que **poseen idéntica parte literal,** con los mismos exponentes.
- ✓ **Monomios iguales,** además de ser **semejantes** tienen **idéntico coeficiente**.
- ✓ **Monomios opuestos,** son **iguales** y con el **signo** del coeficiente **cambiado**.

☑ **Grado de un monomio:** es igual al balance de los exponentes de su parte literal, es decir, la **suma de todos los exponentes de la parte literal**, éstos con su signo y puesta toda la parte literal en el numerador del monomio.

☑ **Valor numérico de un monomio:** es el que se obtiene tras sustituir las variables por valores numéricos concretos y realizar las operaciones indicadas.

- ✓ **Ejemplo,** sea el monomio $5x^{2}$, su valor numérico para x = 3 es:

  $5\cdot(3)^{2}=5\cdot 9=45$

☑ **Operaciones con monomios:**

- ✓ **Suma y resta:** <u>**solo se pueden sumar o restar monomios semejantes**</u>.
  - ➢ La **suma o resta de dos o más monomios semejantes es otro monomio semejante a los anteriores** y que tiene **por coeficiente la suma o resta** de los coeficientes de cada monomio.
  - ➢ **Si no son semejantes** se deja la operación indicada obteniéndose una **nueva expresión** conocida como **polinomio**.
    - Ejemplo: monomios $4x^{3}\,;\,-3x\,;\,5x^{2}$

      Suma $4x^{3}-3x+5x^{2}=4x^{3}+5x^{2}-3x$. Veremos que la ordenación en sentido decreciente es la forma más adecuada de presentar y operar con los polinomios.
  - ➢ La operación suma o resta de monomios se conoce también como **reducción de términos semejantes**.
    - Ejemplo: $\boxed{ax^{n}+bx^{n}-cx^{n}=(a+b-c)\cdot x^{n}}$
    - De modo práctico:

      Sean los monomios $\frac{2}{3}x^{3}+5x^{3}-\frac{3}{4}x^{3}=\frac{59}{12}x^{3}$
- ✓ **Multiplicación:** para multiplicar monomios da igual que sean o no semejantes.
  - ➢ **El producto** de dos o más monomios **es otro monomio** que tiene por **coeficiente el producto de los coeficientes** y **por parte literal el producto de las mismas**, el **grado final** será igual a la **suma de los grados** de cada uno de los monomios factores.
    - Ejemplo: $\boxed{ax^{p}\cdot by^{n}\cdot\frac{c}{a}\cdot x^{q}=\frac{\cancel{a}\cdot b\cdot c}{\cancel{a}}\cdot x^{p+q}\cdot y^{n}=b\cdot c\cdot x^{p+q}\cdot y^{n}}$
    - De modo práctico:

$$3x^4\cdot\frac{1}{2}y^2\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}\cdot x^{4+\frac{3}{2}}\cdot y^2=2\cdot x^{\frac{11}{2}}\cdot y^2$$

- ✓ **Potenciación:** para calcular la potencia de un monomio basta con **aplicar** las **propiedades** de las **potencias**, como son, la potencia de un producto y de un cociente y la potencia de una potencia.
  - ➢ **La potencia** de un monomio **es otro monomio** que tiene por **coeficiente la potencia del coeficiente dado** y por **parte literal** la misma elevada al **producto de los exponentes**.
    - Ejemplo: $\boxed{ax^n\Rightarrow\left(ax^n\right)^p=a^p\cdot x^{n\cdot p}}$
    - De modo práctico:

$$\text{monomio}\quad\frac{2}{3}\cdot x^5\cdot y^3\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\cdot x^5\cdot y^3\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(x^5\right)^3\cdot\left(y^3\right)^3=\frac{2^3}{3^3}\cdot x^{15}\cdot y^9=\frac{8}{27}\cdot x^{15}\cdot y^9$$

☑ **Polinomios:** expresión algebraica formada por **la suma o resta de dos o más monomios no semejantes**. **Cada uno de esos monomios se denomina término**.

- ✓ **Expresión general:** $\boxed{P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}$
- ✓ **Donde n** indica el **grado del polinomio**, luego $\mathbf{a_nx^n}$ es el término de mayor grado, y $\mathbf{a_0}$ es el **término de menor grado** o **término independiente**. a_n , a_{n-1} , etc. ... son los **coeficientes** de los distintos términos, y **x** es la **variable** independiente.
- ✓ Al término $\mathbf{a_1x}$ se le conoce también como **término lineal**.

☑ **Grado de un polinomio:** **es igual al grado del término de mayor grado**.

☑ **Clasificación de los polinomios:**

- ✓ **Por el grado:** pueden ser de primero, segundo, tercero, etc. .... según el grado del término de mayor grado.
- ✓ **Por el número de términos:** de un término (monomio), de dos términos (binomio), de tres términos (trinomio), etc. ....
- ✓ **Forma usual:** indicamos el grado y el número de términos.

☑ **Número de términos de un polinomio:** un polinomio se dice que es completo cuando tiene todos los términos que le corresponden, pero, ¿Cuántos términos le corresponden a cada polinomio?

- ✓ **El número de términos que debe tener un polinomio es igual al grado más uno.** Así:
  - ➢ Primer grado $\Rightarrow$ dos términos a_1x+a_0.
  - ➢ Segundo grado $\Rightarrow$ tres términos $a_2x^2+a_1x+a_0$.
  - ➢ Tercer grado $\Rightarrow$ cuatro términos $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

OBSERVACIÓN: fíjate, en los ejemplos anteriores, que los términos se suelen ordenar siempre de mayor a menor grado (forma decreciente).

☑ **Otra forma de clasificarlos es:**

- ✓ **Completos:** cuando poseen todos los términos que corresponden a su grado.

- ✓ **Incompletos:** cuando falta algún término de los que le corresponden por su grado.
- ✓ **Así pues y de forma usual,** para el siguiente ejemplo, diríamos, polinomio incompleto de cuarto grado y tres términos, o simplemente, **polinomio de cuarto grado incompleto**, $\frac{3}{4}x^4 - 5x + 2$

☑ **IMPORTANTE:** cuando trabajemos con polinomios, lo primero que hay que hacer es **ordenarlos en sentido decreciente**, luego **reducir términos semejantes**, y por último, aunque **no siempre es necesario**, **completarlos con ceros**, en el caso de que no sean completos.

- ✓ **Ordenación:** consiste en colocar los términos unos a continuación de otros guardando el orden del grado del mismo.
- ✓ **Reducción de términos semejantes:** consiste en sumar o restar todos los términos semejantes que se encuentren en la expresión.
- ✓ **Complitud:** consiste en intercalar términos con coeficiente nulo allí donde falte el término del grado que corresponda.
- ✓ **Ejemplo:**
  - ➢ $P_5(x) = 2x^2 - 5x^4 + x + 3x + 1 + x^5 - 3x^3 - 3$
    - $x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 3x + 1 - 3$
    - $x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 2$
    - Es un polinomio de quinto grado completo.
  - ➢ $P_5(x) = \frac{3}{2}x^5 - 2x + 3x^3$
    - $\frac{3}{2}x^5 + 3x^3 - 2x$
    - No hay términos semejantes que reducir.
    - $\frac{3}{2}x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 2x + 0$, ya que por ser de quinto grado ha de tener seis términos, le faltaban tres que hemos completado con ceros.

- ✓ En los siguientes casos reduce términos semejantes, ordena y completa con ceros.

a) $3x^2 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 - 3 - x$ b) $6x^5 - 2x + 3x^3 - 12 - 5x^4$

c) $3x^4 - 5x^2 + 2x^4 + 6x - 7 + x^2 - 5x - 4 - 5x + 2 + 7x^2$

☑ **Valor numérico de un polinomio:** al igual que para los monomios, es el que se obtiene tras sustituir la variable por un valor numérico concreto y realizar las operaciones indicadas.

- ✓ **Ejemplo,** sea el polinomio $R_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$, el valor numérico para x = 2 es $R(2) = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 = 32 - 8 + 2 = 26$

☑ **Operaciones con polinomios:**

- ✓ **Suma y resta:** como un polinomio no es más que la suma o resta indicada de varios monomios no semejantes, **sumar dos o más polinomios consiste en localizar los términos semejantes que hay entre todos ellos y reducirlos**.
  - Para evitar confusiones **lo más importante es organizar bien la suma**, para ello se pueden hacer dos cosas, pero ambas requieren de un **primer paso común**, **ordenar** (en sentido decreciente) todos **los polinomios** que intervengan.
  - Ejemplo:
    Sean los polinomios:

$$P_4(x) = 2x^2 - 5x^4 + 3x + 1 \Rightarrow P_4(x) = -5x^4 + 2x^2 + 3x + 1$$

$$Q_5(x) = x^5 - 3x^3 + x - 3 \Rightarrow Q_5(x) = x^5 - 3x^3 + x - 3$$

$$R_3(x) = x - 2x^2 + 4x^3 \Rightarrow R_3(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$$

  - Una vez ordenados podemos hacer dos cosas:
    - 1º colocarlos unos encima de otros, como si fueran números, haciendo que coincidan los términos correspondientes de cada grado, y sumar monomio a monomio:

$$\begin{array}{cccccc} 0x^5 & -5x^4 & +0x^3 & +2x^2 & +3x & +1 \\ x^5 & +0x^4 & -3x^3 & +0x^2 & +x & -3 \\ 0x^5 & +0x^4 & +4x^3 & -2x^2 & +x & +0 \\ \hline x^5 & -5x^4 & +x^3 & +0x^2 & +5x & -2 \end{array}$$

      Luego $P_4(x) + Q_5(x) + R_3(x) = x^5 - 5x^4 + x^3 + 5x - 2$.
    - 2º , y **más recomendable para ir más rápidos**, abrir un paréntesis y colocar dentro de él todos los coeficientes, con su signo, de los términos correspondientes al mayor grado de todos ellos, luego cerrarlo y multiplicarlo por la parte literal correspondiente, y así término a término. Por último realizar las operaciones de dentro de los paréntesis.

$$P_4(x) + Q_5(x) + R_3(x) = x^5 - 5x^4 + (-3+4)\cdot x^3 + (2-2)\cdot x^2 + (3+1+1)\cdot x + (1-3) =$$

$= x^5 - 5x^4 + x^3 + 5x - 2$, que es el mismo resultado de antes.

Observación IMPORTANTE: El **grado** del polinomio **suma** siempre **es igual o menor que el grado del polinomio sumando de mayor grado**.

- ✓ **Multiplicación:** para multiplicar polinomios da igual que sean o no del mismo grado, que estén o no completos, que estén o no ordenados, etc. ... lo verdaderamente importante es seguir el orden de la multiplicación con rigor.
  - **El producto** de dos o más polinomios **es otro polinomio** que tiene por **grado final** la **suma de los grados** de cada uno de los polinomios factores. Así, el producto de dos polinomios de grados 5 y 7 da como resultado un polinomio de grado 12.
  - **Orden de multiplicación:**
    - **Es conveniente**, aunque no necesario, **ordenar** (en sentido decreciente) los polinomios factores.

- **Se puede multiplicar en cualquier sentido**, de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, pero **siempre es más conveniente multiplicar el de menos términos por el de más términos.**
- **La multiplicación se va haciendo por partes**, el primer término de uno de los factores por todos los términos del otro, sumar luego el producto del segundo de los términos multiplicado por todos los términos del segundo, y así sucesivamente hasta agotar todos los términos del primer factor.
- **Por último** se reducen todos los términos semejantes y se ordena el polinomio resultante.

✓ **Ejemplos:**

- **E1.-** Monomio por polinomio: $2x^3 \cdot \left(5x^2 - 4x + 8\right) = 10x^5 - 8x^4 + 16x$
- **E2.-** Polinomio por polinomio:

  Sean los polinomios: $\begin{cases} P_3(x) = 2x^2 + x^3 + 1 \\ Q_2(x) = x^2 + 3x + 4 \end{cases}$

  - Ordenamos: $\begin{cases} P_3(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \\ Q_2(x) = x^2 + 3x + 4 \end{cases}$
  - Uno es de tercer grado y el otro de segundo, luego el producto va ha ser de quinto grado. Como ambos tienen el mismo número de términos, da igual el orden en que hagamos el producto.
  - $P \cdot Q = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^4 + 6x^3 + 8x^2 + x^2 + 3x + 4$.
  - Reducimos términos semejantes y ordenamos el resultado:

$$P \cdot Q = x^5 + (3+2)x^4 + (4+6)x^3 + (8+1)x^2 + 3x + 4 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 9x^2 + 3x + 4.$$

  - Multiplicando al revés:
  - $Q \cdot P = x^5 + 2x^4 + x^2 + 3x^4 + 6x^3 + 3x + 4x^3 + 8x^2 + 4$.
  - Reducimos términos semejantes y ordenamos el resultado:

$$Q \cdot P = x^5 + (2+3)x^4 + (6+4)x^3 + (1+8)x^2 + 3x + 4 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 9x^2 + 3x + 4.$$

- **E3.-** Polinomios en línea:
  - $\left(4x - 3x^3 + 2x^2 - 1\right) \cdot \left(4x + 2x^2 + 3\right) = \left(-3x^3 + 2x^2 + 4x - 1\right) \cdot \left(2x^2 + 4x + 3\right)$ Multiplicaremos de derecha a izquierda por tener el segundo factor menos términos:

$$\left(-3x^3 + 2x^2 + 4x - 1\right) \cdot \left(2x^2 + 4x + 3\right) = -6x^5 + 4x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 12x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 4x -$$

$$- 9x^3 + 6x^2 + 12x - 3 = -6x^5 + (4-12)x^4 + (8+8-9)x^3 + (-2+16+6)x^2 + (-4+12)x - 3 =$$

$= -6x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 8x - 3$, que es el resultado final.

✓ **División:** para dividir polinomios **el grado del polinomio divisor ha de ser igual o menor que el del polinomio dividendo**.

- **El cociente** de dos polinomios **es otro polinomio** que tiene por **grado final** la **diferencia de los grados** del dividendo menos el del divisor. El resto es también un polinomio cuyo grado ha de ser menor que el del divisor, y se cumple siempre la máxima:

- $\boxed{\textbf{Dividendo} = \textbf{divisor} \times \textbf{cociente} + \textbf{resto}}$

✓ **MUY IMPORTANTE:** **cuando hagamos divisiones, siempre ordenar** (en sentido decreciente) **y completar con ceros, tanto el polinomio dividendo como el divisor.**

✓ **Ejemplos de divisiones:**

$$\begin{array}{lll}
2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 & & \underline{|x^2 + x\quad} \\
\underline{-2x^3 - 2x^2} \quad \downarrow \quad \downarrow & & 2x - 5 \rightarrow \text{Cociente} \\
0x^3 - 5x^2 - 5x \quad \downarrow & & \\
\quad \underline{5x^2 + 5x} \quad \downarrow & & \\
\quad 0x^2 \quad + 0x \quad - 5 \rightarrow \text{Resto de la división.} & &
\end{array}$$

Se procede igual que si se tratara de números.
Así lo primero es **buscar un número que multiplicado por el coeficiente** del término de mayor grado del divisor, **iguale** éste con **el del dividendo**.
Luego una variable elevada a **un exponente** adecuado para **que iguale el del dividendo**.
Se multiplica todo el divisor por dicho monomio y el resultado **se lleva restando** bajo los términos correspondientes del dividendo. **Se suman y se baja el siguiente término** del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio, resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Éste será el **resto de la división**.
Finalmente se comprueba que:

$\boxed{\textbf{Dividendo} = \textbf{divisor} \times \textbf{cociente} + \textbf{resto}}$, en nuestro caso:

$$2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 = \left(x^2 + x\right)\cdot\left(2x - 5\right) + (-5) = 2x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 5x - 5 =$$
$$= 2x^3 - 3x^2 - 5x - 5 \text{, c.q.d.}$$

✓ **Ejemplos:**

➢ **E1.-** Polinomio por monomio:

- $\begin{cases} \text{Dividendo} : 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \\ \text{Divisor} : x^2 \end{cases}$

- $$\begin{array}{ll}
3x^4 - 5x^3 + 4x^2 & \underline{|x^2\quad\quad} \\
\underline{-3x^4} \quad \downarrow \quad \downarrow & 3x^2 - 5x + 4 \rightarrow \text{Cociente} \\
0x^4 - 5x^3 \quad \downarrow & \\
\quad \underline{5x^3} \quad \downarrow & \\
\quad 0x^3 + 4x^2 & \\
\quad\quad \underline{-4x^2} & \\
\quad\quad 0x^2 \rightarrow \text{Resto} \Rightarrow \text{es exacta.} &
\end{array}$$

- Comprobamos:
$3x^4 - 5x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot \left(3x^2 - 5x + 4\right) + 0 = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2$ c.q.d.

- Observación: en estos casos lo que hacemos no es más que aplicar el proceso de simplificación de fracciones, ya que:

- $\left(3x^4-5x^3+4x^2\right)\div\left(x^2\right)=\dfrac{3x^4-5x^3+4x^2}{x^2}=\dfrac{3x^4}{x^2}-\dfrac{5x^3}{x^2}+\dfrac{4x^2}{x^2}$
- Simplificando: $\dfrac{3x^{\cancel{4}2}}{\cancel{x^2}}-\dfrac{5x^{\cancel{3}1}}{\cancel{x^2}}+\dfrac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3x^2-5x+4$

➢ **CONCLUSIÓN:** dividir un polinomio por un monomio no es más que simplificar la fracción algebraica correspondiente.

➢ **E2.-** Polinomios entre sí:

- $\begin{cases}\text{Dividendo}\ :\ x^6-3x-x^3-3\\ \text{Divisor}\ :\ -3+x^2\end{cases}$
- Lo primero ordenar y completar:
- $\left(x^6+0x^5+0x^4-x^3+0x^2-3x-3\right)\div\left(x^2+0x-3\right)$
- $$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & +0x^5 & +0x^4 & -x^3 & +0x^2 & -3x & -3 & \ x^2+0x-3 \\ \cline{8-8}
-x^6 & -0x^5 & +3x^4 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ x^4+3x^2-x+9 \to \text{Cociente} . \\ \cline{1-3}
0x^6 & +0x^5 & +3x^4 & -x^3 & +0x^2 & \downarrow & \downarrow & \\
 & & -3x^4 & +0x^3 & +9x^2 & \downarrow & \downarrow & \\ \cline{3-5}
 & & 0x^4 & -x^3 & +9x^2 & -3x & \downarrow & \\
 & & & x^3 & +0x^2 & -3x & \downarrow & \\ \cline{4-6}
 & & & 0x^3 & +9x^2 & -6x & -3 & \\
 & & & & -9x^2 & +0x & +27 & \\ \cline{5-7}
 & & & & 0x^2 & -6x & +24 & \to \text{Resto}.
\end{array}$$
- Comprobación: $\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^4+3x^2-x+9\right)+\left(-6x+24\right)=$

$=x^6+3x^4-x^3+9x^2-3x^4-9x^2+3x-27-6x+24=$

$=x^6+(3-3)x^4-x^3+(9-9)x^2+(3-6)x+(-27+24)=$

$=x^6-x^3-3x-3$ c.q.d.

➢ **CONCLUSIÓN:** es **fundamental ordenar** (en sentido decreciente) **y completar** los polinomios, dividendo y divisor, antes de hacer la división. Además, fíjate en que **el número de términos a dividir en cada paso ha de ser igual al número de términos del divisor**, luego el paso de bajar términos no es necesariamente término a término. Como puedes ver, **en el segundo paso hemos bajado dos términos simultáneamente**.

☑ Otra forma de dividir: DIVISIÓN RUFFINI.

✓ **Cuando el divisor sea un binomio**, podemos aplicar una **regla** muy sencilla que consiste en lo siguiente. Sea el polinomio divisor $(x-2)$, y el polinomio dividendo $3x^4-8x^2+5x-1$, para hacer la división por la regla de Ruffini, hay que realizar los siguientes pasos:

➢ **Ordenar** (en sentido decreciente) **y completar con ceros el dividendo:**

$3x^4+0x^3-8x^2+5x-1$

- **Se escriben en hilera los coeficientes del polinomio dividendo**, en el mismo orden en que se encuentran en el polinomio.

$$3 \quad 0 \quad -8 \quad 5 \quad -1$$

- **En el extremo izquierdo**, y en segunda hilera, **se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor**.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

- A la siguiente hilera **se baja el primer coeficiente del dividendo,** tal como está.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

- **Se multiplica éste por el opuesto del término independiente del divisor** y el resultado se sitúa debajo del segundo coeficiente del dividen-do, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & & & \\ \hline & 3 & 6 & & & \end{array}$$

- **Se multiplica, de nuevo, ése resultado por el opuesto del término independiente del divisor,** y el resultado se sitúa debajo del tercer coeficiente del dividendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del resultado anterior, y así sucesivamente hasta completar todos los términos del polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & 12 & 8 & 26 \\ \hline & 3 & 6 & 4 & 13 & 25 \end{array}$$

- **El último valor de la última fila es el resto de la división**, en este caso es 25, y los números anteriores de la última fila son los **coeficientes del polinomio cociente** ordenados en sentido decreciente, así:
  - **Cociente:** $3x^3 + 6x^2 + 4x + 13$ **y resto:** 25.
  - **Comprobación:**

$$3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 = (x-2)\cdot\left(3x^3 + 6x^2 + 4x + 13\right) + 25 =$$

$$= 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 13x - 6x^3 - 12x^2 - 8x - 26 + 25 = 3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 \text{ c.q.d.}$$

- Realiza las siguientes divisiones por este método:

a) $\left(x^3 - 5x^2 + 6x - 3\right) \div (x-2)$ b) $\left(x^4 - 3x^2 + 7\right) \div (x-3)$

c) $\left(3x^5 - 4x^3 + 6x - 8\right) \div (x+1)$ d) $\left(x + \frac{3}{2}x^4 + 2x^5 - \frac{13}{4}x^3\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Actividades de aplicación.

P1.- Efectúa las siguientes operaciones con monomios:

a) $5x^4 - 3x^4 + \frac{2}{3}x^4 =$ b) $7x^3y^2 - 3y^2x^3 + 9x^3y^2 =$

c) $\frac{3}{4}x^6 + \frac{5}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^6 =$ d) $\frac{4}{5}x^4y^3z - \frac{7}{8}y^3zx^4 + \frac{7}{12}zx^4y^3 =$

e) $-3x^4 + 4x^4 - \frac{2}{3}x^4 =$ f) $5x^3 - 4x^3 - \frac{1}{5}x^3 =$ g) $-8x^9 + 4x^9 - 7x^9 =$

P2.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(4x - 3x^3 + 2x^2 - 1)\cdot(4x + 2x^2 + 3) =$ b) $(4x^3 - 2x + 1)\cdot(6x^2) =$

c) $(9x^3 - 3x + 4)\cdot\left(\frac{-5}{4}x^4\right) =$ d) $(3x - x^3 + 3)\cdot(x^2 - 3x + 1) =$

e) $(5 - 3x^2 + 4x)\cdot(x^3 - 2x - 2) =$ f) $(3x + 2)\cdot(3x - 2) =$ g) $(a + b)\cdot(a - b) =$

h) $(x^2 - x)\cdot(x^2 + x) =$ i) $(x + y)\cdot(x + y) =$ j) $(x - y)\cdot(x - y) =$

k) $\left(x^2 + \frac{2}{3}\right)\cdot\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) =$ l) $(2x - 3y)\cdot(2x - 3y) =$ m) $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{5}\right) =$

n) $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{5y}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{5y}{2}\right) =$

P3.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3x - 2)\cdot(x^2 - 1) - (4x^3 - 3x + 1) =$ b) $(4x + 3)\cdot(x^2 - 1) - (4x^3 - 3x + 1) =$

c) $(5x^2 - 2)\cdot(x^2 + 3x - 1) + (x - 1)\cdot(x^3 + 3x - 1) =$

d) $(3x - 2)\cdot(4x^2 - 3) - (3x^2 + (x - 1)\cdot(x + 3)) - 1 =$

e) $(2x^2 - 3x + 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}\right) - x\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot(x + 3)\right) =$

f) $\left(x - \frac{3}{4}\right)\cdot\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{3}{2}\right) =$ g) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\cdot(x - (x - 3)\cdot(x + 2)) + x^2 - 2x$

P4.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(x^{2}-1\right)^{2}=$ b) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)^{2}=$ c) $\left(3x^{2}-2y\right)^{2}=$

d) $\left(\frac{3}{2}x^{2}-\frac{2}{3}\right)^{2}=$ e) $\left(\frac{5}{4}x^{3}-x^{2}\right)^{2}=$ f) $\left(x^{2}-2x\right)^{2}=$

g) $(3x-2)^{2}-\left(x^{2}+2x\right)^{2}+2x\cdot\left(3-4x^{3}\right)=$

h) $\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)^{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}+x\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)=$

i) $\left(\frac{3}{4}x^{2}-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^{2}+\frac{5}{2}\right)=$ j) $\left(\frac{-3}{4}x-y\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}x+y\right)=$

k) $\left(\frac{3}{5}x-\frac{2}{7}x^{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{7}x^{3}\right)=$ l) $\left(-3x^{2}+x^{3}\right)\cdot\left(3x^{2}+x^{3}\right)=$

P5.- Sean los polinomios:

$$A(x,\ y)\ =\ \frac{1}{2}\ x^{2}\ -\ xy\ +\ \frac{1}{5}\ y^{2}$$

$$B(x,\ y)\ =\ \frac{5}{8}\ x^{2}\ -\ \frac{1}{3}\ xy\ +\ \frac{3}{10}\ y^{2}$$

$$C(x,\ y)\ =\ \frac{-\ 3}{5}\ x^{2}\ +\ \frac{14}{15}\ xy\ -\ y^{2}$$

Efectuar las siguientes operaciones:

a) $A(x,\ y)+B(x,\ y)+C(x,\ y)$ b) $A(x,\ y)-B(x,\ y)-C(x,\ y)$

c) $A(x,\ y)-\left(B(x,\ y)+C(x,\ y)\right)$ d) $A(x,\ y)+B(x,\ y)-C(x,\ y)$

e) $A(x,\ y)+\left(B(x,\ y)-C(x,\ y)\right)$ f) $\left(A(x,\ y)-B(x,\ y)\right)-C(x,y)$

P6.- Sean los polinomios:

$$A(x)\ =\ \frac{5}{8}\ x^{3}\ +\ \frac{2}{3}\ x^{2}\ +\ \frac{7}{4}\ x\ -\ 3$$

$$B(x)\ =\ \frac{1}{2}\ x\ +\ \frac{2}{3}\ -\ \frac{1}{2}\ x^{3}\ -\ \frac{4}{5}\ x^{2}$$

Efectuar las operaciones: a) A(x) – B(x) b) A(x) + B(x) c) B(x) – A(x)

P7.- Sean los polinomios:

$$A = \frac{1}{3}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + 3xy$$

$$B = \frac{5}{6}x^2y - \frac{1}{3}xy + \frac{7}{5}xy^2$$

$$C = \frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x^2y - \frac{5}{6}xy$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $A-(B+C)$ b) $B+C-A$ c) $C-(A-B)$

d) $B-(A-C)$ e) $A-B+C$ f) $A+B-C$

P8.- Sean los polinomios: $P(x) = -3x^2 - 4x + 8$; $Q(x) = 5x^2 + 6x - 9$

$R(x) = x^3 - 5x^2 + x - 8$; $S(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 13$

Efectuar las siguientes operaciones:

a) $P(x)+Q(x)$ b) $P(x)-R(x)$ c) $R(x)+S(x)$ d) $Q(x)-S(x)$

e) $P(x)\cdot Q(x)$ f) $P(x)\cdot R(x)$ g) $Q(x)\cdot S(x)-R(x)$

P9.- Sean los polinomios:

$P(x) = 2x^2 - x + 5$; $Q(x) = -x^2 + 2x - 2$; $R(x) = x + 3$

Efectuar: a) $R(x)\cdot P(x)-R(x)\cdot Q(x)$ b) $P(x)\cdot R(x)+P(x)\cdot Q(x)$

P10.- Efectuar las operaciones indicadas:

1) $\left(\frac{5}{8}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{4}x - 3\right) - \left(\frac{1}{2}x + 2\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2\right) =$

2) $\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}x - 5\right)\cdot\left(x^2 + \frac{4}{9}\right) =$

3) $\left(\frac{3-x}{2} - \frac{2x-3}{6}\right)\cdot\left(\frac{x-2}{4} + \frac{3x-2}{3}\right) =$

4) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y\right) - \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y\right)^2 =$

5) $\left(\frac{3}{2}x - y\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{4}y\right)^2 =$

6) $\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(2x^2 + 4x - 1\right) + \left(2x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) =$

7) $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2\right)^2 - \frac{2}{5}\cdot\left(2 - \frac{5}{6}x^2\right)^2 =$

8) $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + x - \frac{1}{8}\right) - \left(\left(x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)\right) =$

9) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^2 - \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - \frac{3}{5}\right)^2 =$

10) $\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}x - 5\right) \cdot \left(x^2 + \frac{4}{9}\right) =$

P11.- Hacer las siguientes divisiones de polinomios:

a) $\left(15a^3 - 27a^2 + 12a - 3a^5\right) \div 3a$

b) $\left(5x^5 - 3x^7 + 4x^4 - 5x^3\right) \div 2x^2$

c) $\left(12x^6 - 9x^5 + 6x^4\right) \div 3x^3$

d) $\left(6x^5 + 9x^3 + 12x^2\right) \div 3x^2$

e) $\left(8x^5 - 14x^4 - 5x^3\right) \div \left(2x^2 - 5x + 3\right)$

f) $\left(x^6 - 3x - x^3 - 3\right) \div \left(x^2 - 3x\right)$

g) $\left(4x^2 - 19x + 4x^3\right) \div \left(-3 - 2x\right)$

h) $\left(2x^5 - 3\right) \div \left(2x^2 - 4\right)$

i) $\left(\frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{5}x - 1\right) \div \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + 3\right)$

j) $\left(\frac{3}{2}x^4 + \frac{19}{8}x^3 - \frac{11}{12}x^2 + \frac{2}{3}x - 3\right) \div \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)$

P12.- Hacer las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, en todas calcular el cociente y el resto.

a) $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right) \div \left(x - 2\right)$

b) $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right) \div \left(x + 3\right)$

c) $\left(6x^4 + 20x^3 - 41x^2 + 50x + 20\right) \div \left(x + 5\right)$

d) $\left(20 - 22x^3 + 5x^5\right) \div \left(x - 2\right)$

e) $\left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4\right) \div \left(x - 2\right)$

f) $\left(7x^2 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{12}x - \frac{15}{4}x^3 + \frac{1}{2}\right) \div \left(x + 3\right)$

P13.- Calcular en todos los casos, sin hacer la división, el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(x^2 - 3x^4 + 3 - x\right) \div (x - 3)$

b) $\left(\frac{9}{4}x^5 - \frac{45}{8}x^3 + \frac{3}{2} - x^2\right) \div \left(x - \frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\right) \div (x + 1)$

d) $\left(x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 7\right) \div (x + 1)$

e) $\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + 4x^5\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

f) $\left(\frac{1}{9}x^4 + \frac{5}{6}x - x^2\right) \div (x - 3)$

AUTOEVALUACIÓN

Vas a reflexionar respecto a cómo te sentiste y qué tanto aprendiste en el desarrollo de esta guía.

En tu cuaderno registra las conclusiones a las que llegaste *¡Debes de ser muy sincero!*

1. ¿Qué fue lo que más te causo dificultas al resolver las actividades de la guía?
2. ¿Por qué crees que te causó dificultad?
3. ¿Qué fue lo que te gustó del trabajo en casa en la guía?
4. Con tus palabras escribe qué aprendiste
5. ¿Qué crees que puedes hacer en la próxima guía para que entiendas mejor lo que se te propone?